CONCOURS D'ENTRÉE
1979
ÉPREUVE DE CALCUL NUMÉRIQUE
(commune aux deux options)

Durée : 1 heure

Ce sujet comporte 2 pages de texte

Objet : Comparaison de diverses évaluations de la longueur 4ℓ d'une ellipse de demi-axes $a = 4$, $b = 3$.
ℓ est donné par l'intégrale elliptique :

$$\ell = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{7}{16}\sin^2\varphi}\ d\varphi$$

De ce résultat théorique peuvent être déduites des formules donnant des valeurs approchées, formules que l'on admettra. Les résultats seront donnés sous forme de nombres à 5 décimales.

1°) Premier encadrement de ℓ

La longueur de l'ellipse est comprise entre celles de deux cercles ayant pour rayons respectifs

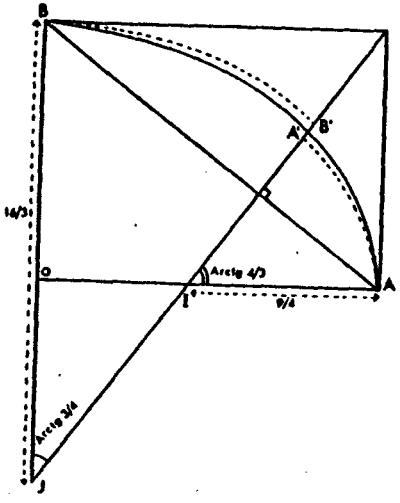
$$\frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}}\ .$$

Par suite $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{\pi}{2} < \ell < \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}$

Calculer ces deux valeurs extrêmes ℓ_1 et ℓ_2 .

2°) Pour dessiner l'ellipse (figure ci-contre) il est commode de se guider sur les cercles de courbure (I) et (J) relatifs aux sommets A et B.
On se demande si on aurait une bonne évaluation de ℓ en remplaçant l'arc d'ellipse par deux arcs de cercle :

- arc AA' appartenant au cercle (I) de rayon $\frac{9}{4}$ et d'angle au centre Arctg $\frac{4}{3}$ (à évaluer en radians).
- arc BB' appartenant au cercle (J) de rayon $\frac{16}{3}$ et d'angle au centre Arctg $\frac{3}{4}$ (à évaluer en radians).



On calculera donc :

$$\ell_3 = \frac{9}{4}\ \text{Arctg}\ \frac{4}{3} + \frac{16}{3}\ \text{Arctg}\ \frac{3}{4}$$

Le résultat est-il en accord avec la précédente évaluation ?

3°) Deuxième encadrement de ℓ

- Par excès :

$$\ell_4 = \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{a^2(2+\sqrt{2}) + b^2(2-\sqrt{2})} + \sqrt{a^2(2-\sqrt{2}) + b^2(2+\sqrt{2})}\right)$$

- Par défaut :

$$\ell_5 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - \frac{7}{2^3}\sin^2\varphi - \frac{7^2}{2^9}\sin^4\varphi - \frac{7^3}{2^{14}}\sin^6\varphi - 0{,}009\sin^8\varphi\right) d\varphi$$

On rappelle que si n est pair et supérieur ou égal à 2 on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\varphi\ d\varphi = \frac{\pi}{2} \times \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}$$

4°) On utilise l'extrait suivant des tables de Legendre relatives au calcul des intégrales elliptiques du type :

$$I_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2\alpha\sin^2\varphi}\ d\varphi$$

α	I_α
38°	1,4092
39°	1,4013
40°	1,3931
41°	1,3849
42°	1,3765
43°	1,3680
44°	1,3594

La valeur de α est donnée par la formule $\sin^2\alpha = \frac{7}{16}$ $(0 < \alpha < 90°)$ et $\ell = 4\ I_\alpha$

Une interpolation linéaire permet d'obtenir I_α avec 4 décimales exactes.

5°) Récapitulation et comparaison des résultats. Remarques éventuelles.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail